

# Comparaison de diverses stratégies d'irrigation de cultures sous contrainte de quota en eau

Kenza Boumaza, Alain Rapaport, Sébastien Roux

UMR MISTEA, Univ. Montpellier, INRAE, Montpellier SupAgro

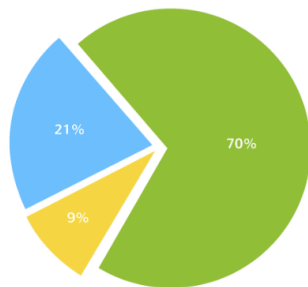
27/01/2021



INRAE



- L'irrigation agricole est le secteur le plus consommateur d'eau.
- Raisonner la conduite de l'irrigation est une nécessité.
- La modélisation et la théorie du contrôle optimal sont des bons outils pour optimiser l'efficacité d'irrigation.



- Industrie (chimie, refroidissement, production d'énergie)
- Irrigation agricole
- Besoins domestiques (boisson, hygiène et cuisson)

Les usages de l'eau à l'échelle mondiale en 2018 selon l'ONU

**Objectifs de ce travail:** Établir de nouvelles stratégies d'irrigation en utilisant la théorie du contrôle optimal afin de maximiser la biomasse au moment de la récolte sous contrainte de quota en eau.

On considère le modèle de culture simplifié :

$$\begin{aligned}\dot{S} &= -k_1\varphi(t)K_S(S) - k_1(1 - \varphi(t))K_R(S) + k_1k_2u(t), & S(0) &= 1 \\ \dot{B} &= k_3\varphi(t)K_S(S), & B(0) &= 0\end{aligned}$$

ou le contrôle est donné par

$$u(t) = F(t)/F_{max} \in [0, 1].$$

On considère le modèle de culture simplifié :

$$\begin{aligned}\dot{S} &= -k_1\varphi(t)K_S(S) - k_1(1 - \varphi(t))K_R(S) + k_1k_2u(t), & S(0) &= 1 \\ \dot{B} &= k_3\varphi(t)K_S(S), & B(0) &= 0\end{aligned}$$

ou le contrôle est donné par

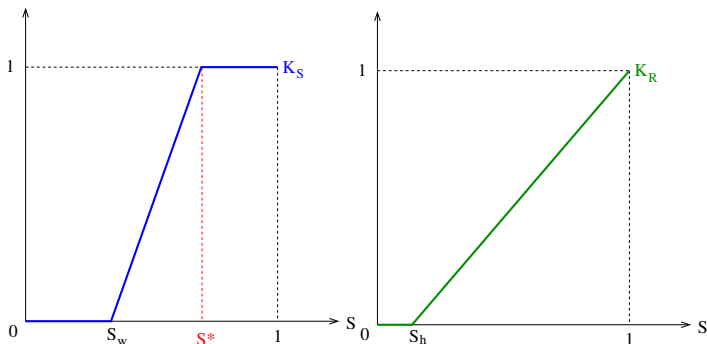
$$u(t) = F(t)/F_{max} \in [0, 1].$$

Le problème de contrôle optimal est donné par

$$\max_{u(\cdot)} B(T) \quad \text{tel que} \quad F_{max} \int_0^T u(t)dt \leq \bar{Q}.$$

# Hypothèses

$K_S(\cdot)$ ,  $K_R(\cdot)$  sont des fonctions continues et **linéaires par morceaux** définies sur  $[0, 1]$  à valeurs dans  $[0, 1]$



$S_h$  : Le point hygroscopique.

$S_w$  : Le point de flétrissement.

$S^*$  : Seuil d'humidité optimal pour une croissance idéale de la plante.

# Le problème du contrôle optimal

Le problème de contrôle optimale peut être re-écrit de la façon suivante:

$$\max_{u(\cdot)} \int_0^T k_3 \varphi(t) K_S(S(t)) dt$$

tel que

$$\begin{aligned} \dot{S} &= -k_1 \varphi(t) K_S(S) - k_1 (1 - \varphi(t)) K_R(S) + k_1 k_2 u(t), & S(0) &= 1 \\ \dot{V} &= u(t), & V(0) &= 0 \end{aligned}$$

avec la cible

$$V(T) \leq \bar{V}.$$

et la contrainte sur l'état

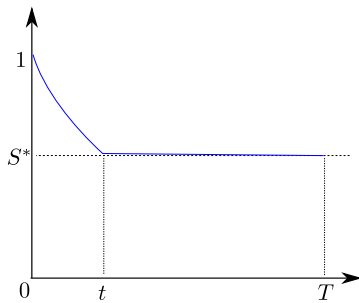
$$S(t) \in [0, 1].$$

**Remarque.** Si  $\bar{V}$  est suffisamment grand alors tout contrôle qui permet de rester au-dessus de  $S^*$  est optimal.

**Définition.** On définit le contrôle MRAP (*Most Rapid Approach Path*) vers  $S = S^*$  comme suit

$$\tilde{u}(t) := \begin{cases} 0 & t \in [0, \underline{t}] \\ u_{S^*}(t) & t \in (\underline{t}, T] \end{cases}$$

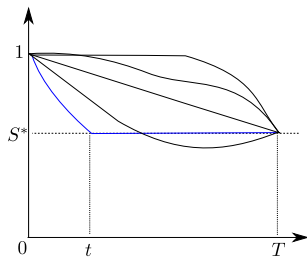
avec  $\underline{t} := \sup\{t \in [0, T] \text{ s.t. } \underline{S}(t) > S^*\} < T$  et  $u_{S^*}(t) := \frac{\varphi(t) + (1 - \varphi(t))K_R(S^*)}{k_2}$ .





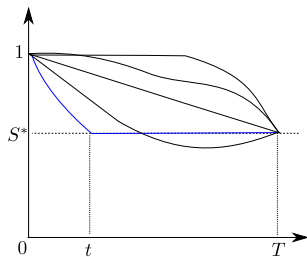
**Proposition.** Soit  $u(\cdot)$  un contrôle admissible et  $S(\cdot)$  sa trajectoire associée telle que  $S(t) \geq S^*$  pour tout  $t \in [0, T]$ . Alors, le contrôle MRAP  $\tilde{u}(\cdot)$  avec sa trajectoire associée  $\tilde{S}(\cdot)$  vérifie :

$$\tilde{S}(t) \leq S(t) \quad \text{et} \quad \int_0^T \tilde{u}(t) dt \leq \int_0^T u(t) dt$$



**Proposition.** Soit  $u(\cdot)$  un contrôle admissible et  $S(\cdot)$  sa trajectoire associée telle que  $S(t) \geq S^*$  pour tout  $t \in [0, T]$ . Alors, le contrôle MRAP  $\tilde{u}(\cdot)$  avec sa trajectoire associée  $\tilde{S}(\cdot)$  vérifie :

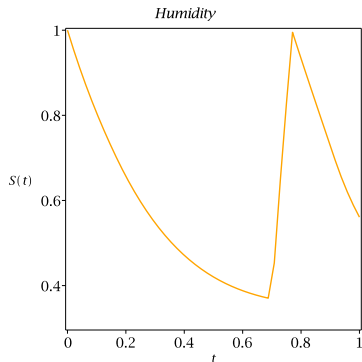
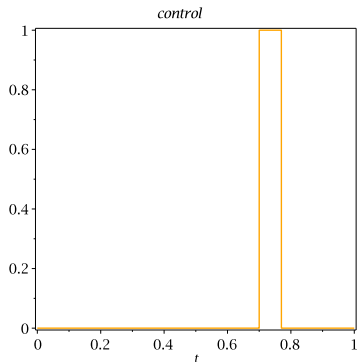
$$\tilde{S}(t) \leq S(t) \quad \text{et} \quad \int_0^T \tilde{u}(t) dt \leq \int_0^T u(t) dt$$



**Hyp 1.**  $\underline{t} < T$  et  $\bar{V} < \int_0^T \tilde{u}(t) dt$ .

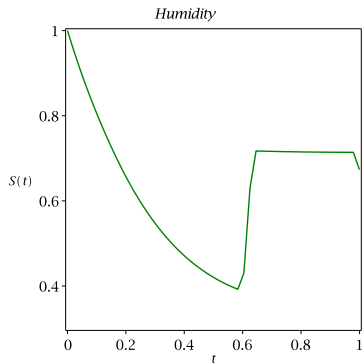
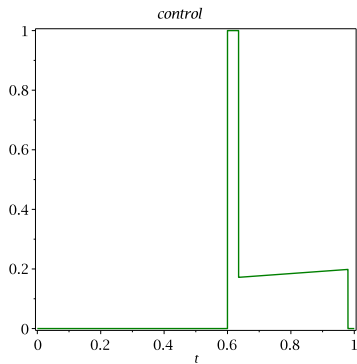
**Définition.** Soit  $t_S \in (0, T)$  le temps de déclenchement associé à un seuil d'humidité  $S_m \in (S_h, S^*]$ . On définit le *open-loop control* comme suit :

$$u_{S_m}^{OS}(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t < t_S \text{ or } t > \min(t_S + \bar{V}, T), \\ 1 & \text{if } t \in [t_S, \min(t_S + \bar{V}, T)). \end{cases}$$

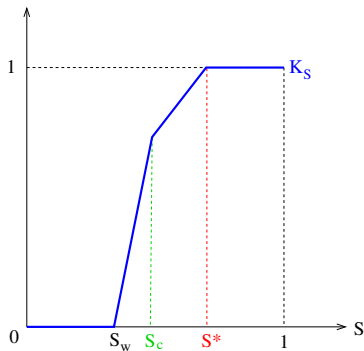


**Définition.** Soit  $S_m \in (S_h, S^*]$ . on définit le *time-varying feedback control* comme suit :

$$\psi_{S_m}^{SOS}(t, S, V) := \begin{cases} 0 & \text{si } V = \bar{V} \text{ ou } S > S_m \text{ avec } V = 0, \\ \tilde{u}_{S^*}(t) & \text{si } S = S^* \text{ avec } V < \bar{V}, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$



Hyp 2. On suppose que  $K_S$  est concave et a une cassure  $S_c \in (S_w, S^*)$ .

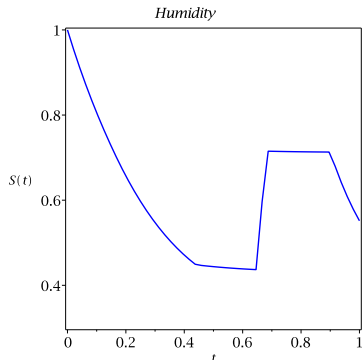
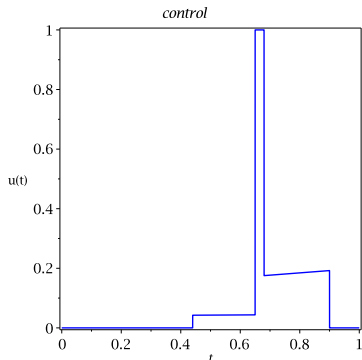


Sous cette hypothèse on définit la stratégie SMS.

# La stratégie SMS

**Définition.** Soit  $S_m \in (S_h, S^*]$ ,  $V_1 \in (0, \bar{V})$ ,  $S_c \in (S_w, S^*]$ . On définit le *time-varying feedback control* comme suit :

$$\psi_{S_m, V_1}^{SMS}(t, S, V) := \begin{cases} 0 & \text{si } V = \bar{V} \text{ or } S > S_m \text{ with } V = 0, \\ u_{S^*}(t) & \text{si } S = S^*(S_m) \text{ avec } V < \bar{V}, \\ u_{S_c}(t) & \text{si } S = S_c(S_m) \text{ avec } V < V_1, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$



Soit  $(u, S, V)$  un triplet optimal.

**Premiers résultats:** Si  $\bar{V} < \int_0^T \tilde{u}(t)dt$  alors:

1.  $u(t) = 0$  pour tout  $t \in [0, \underline{t}]$ .
2.  $S(t) \leq S^*$  pour tout  $t \in [\underline{t}, T]$ .
3.  $V(T) = \bar{V}$ .

**Résultats obtenues par le PMP:**

1. Il existe  $\bar{t} < T$  tel que pour tout  $t \in [\bar{t}, T]$ ,  $u(t) = 0$ .
2. L'arc singulier est optimal si  $S = S^*$  ou  $S = S_c$ .
3. Au plus 2 commutations sont possibles entre  $u = 0$  et le contrôle singulier ou  $u = 1$ .

- La stratégie OS n'est pas toujours optimale.
- La stratégie SOS est optimale.
- Si  $K_S$  a trois cassures, alors la stratégie SMS est optimale.

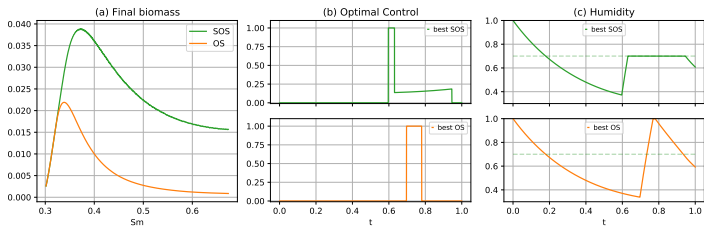


- La stratégie OS n'est pas toujours optimale.
- La stratégie SOS est optimale.
- Si  $K_S$  a trois cassures, alors la stratégie SMS est optimale.

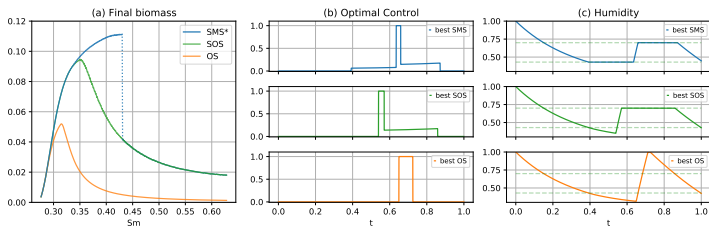
**Remarques:** 1. La stratégie OS est un cas particulier de la stratégie SOS et les deux stratégies sont des cas particuliers de la stratégie SMS.

2. Dans le cas de pénurie d'eau, les trois stratégies coïncident.

# Comparison numérique entre les trois stratégies



Comparaison entre les stratégies SOS et OS lorsque  $K_S$  a deux cassures



Comparaison entre les stratégies SMS, SOS et OS lorsque  $K_S$  a trois cassures

## Proposition.

Tout arc singulier défini sur un intervalle non vide  $I$  satisfait  $S(t) = \tilde{S} \in (S_w, S^*]$ ,  $t \in I$  où  $\tilde{S}$  est une cassure de  $K_S$  ou  $K_R$ .

## Proposition.

Tout arc singulier défini sur un intervalle non vide  $I$  satisfait  $S(t) = \tilde{S} \in (S_w, S^*]$ ,  $t \in I$  où  $\tilde{S}$  est une cassure de  $K_S$  ou  $K_R$ .

## Théorème 1.

Soit  $\mathcal{C}(S)$  l'ensemble des cassures  $\tilde{S} \geq S$  de  $K_S$  et  $K_R$  dans  $(S_w, S^*]$  et soit  $n(S) = \text{card } \mathcal{C}(S)$ . Alors, il existe une valeur  $S_m \in (S_h, S^*]$  et une suite non-décroissante  $V_i$ ,  $i = 1, \dots, n(S_m)$  avec au moins une valeur qui vaut  $\bar{V}$  tels que la stratégie SMS définie par

$$\psi_{S_m, \{V_i\}}^{SMS}(t, S, V) := \begin{cases} 0 & \text{si } V = \bar{V} \text{ or } S > S_m \text{ avec } V = 0, \\ \tilde{u}_S(t) & \text{si } S = \tilde{S}_i(S_m) \text{ pour } i \in \{1, \dots, n(S_m)\} \text{ avec } V < V_i, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1)$$

avec

$$\int_0^{t_M} \psi_{S_m, \{V_i\}}^{SMS}(t, S(t), V(t)) dt = \bar{V} \quad \text{avec } t_M < T \quad (2)$$

est optimale.

## Théorème 2.

Si  $\mathcal{C}(S) = \{S^*\}$  alors il existe une valeur  $S_m \in (S_h, S^*]$  tel que la stratégie SOS définie par

$$\psi_{S_m}^{SOS}(t, S, V) := \begin{cases} 0 & \text{if } V = \bar{V} \text{ ou } S > S_m \text{ avec } V = 0, \\ \tilde{u}_{S^*}(t) & \text{if } S = S^* \text{ avec } V < \bar{V}, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3)$$

avec

$$\int_0^{t_M} \psi_{S_m}^{SOS}(t, S(t), V(t)) dt = \bar{V} \quad \text{avec } t_M < T \quad (4)$$

est optimale.

Merci de votre attention